Métodos Numéricos
4 de junio de 2018
Segundo Parcial

DEPARTAMENTO DE COMPUTACION
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales - UBA

☐ Resolver ejercicios en hojas separadas ☐ Completar nombre en las hojas	Lib. Univ.		Nombre y Apellido		
☐ Completar LU y nombre en el enunciado ☐ **Justificar <u>todas</u> las respuestas**	Ej. 1 23	Ej. 2 30	Ej. 3 23	Ej. 4 22	Nota 98(AP)

1. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica. Recordamos que el *cociente de Rayleigh* de un vector cualquiera $x \in \mathbb{R}^n$ es
$$r_A(x) = \frac{x^t A x}{x^t x}$$
   (a) Siendo $\rho(A)$ el radio espectral de A, probar que $\forall x \in \mathbb{R}^n, |r_A(x)| \le \rho(A)$. (10 puntos)

   (b) Sea $y \in \mathbb{R}^n$ un autovector de A asociado al autovalor λ, tal que $\|y\|_2 = 1$ y $|\lambda| = \rho(A)$. Se dispone de una aproximación $z = y + h$ de y, con $z, h \in \mathbb{R}^n, \|z\|_2 = 1$ que verifica $\|z - y\|_2 = \|h\|_2 < \epsilon$ con $\epsilon \in \mathbb{R}_{>0}$. Probar que si $M = \|A - \lambda I\|_2$, se tiene: (15 puntos)
$$|r_A(z) - \lambda| \le M^2\epsilon^2$$

2. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz tal que $rg(A) = r > 1$ y $A = U\Sigma V^t$ su descomposición SVD. Sean además $u_1, \dots, u_n$ las columnas de U, $v_1, \dots, v_n$ las columnas de V, y $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ sus valores singulares no nulos. Siendo $B = A - \sigma_1 u_1 v_1^t$, probar:
   (a) $v_1 \in Nu(B)$. (5 puntos)
   (b) $Bw = Aw$ para todo vector w ortogonal a v_1. (5 puntos)
   (c) $\sigma_2, \dots, \sigma_r$ son valores singulares de B. (10 puntos)
   (d) Los vectores $v_2, \dots, v_r$ se encuentran en el espacio fila de B. (10 puntos)

3. Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definida positiva y $\omega > 0$ una constante. Sea $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matriz diagonal cuyos elementos son los elementos de la diagonal de A. Se tiene el siguiente esquema iterativo:
$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + \omega D^{-1} r^{(k)} \qquad k = 0, 1, \dots$$
   con $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$ el residuo de la iteración k-ésima.
   (a) Probar que si $\omega = 1$ el esquema iterativo se corresponde al método de Jacobi. (10 puntos)
   (b) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$. Probar que el esquema iterativo converge si y sólo si $\omega < 2$. (13 puntos)

4. Sea $k \in \mathbb{R}$ y $C = \{(1,0), (0,k), (-1,1)\}$ un conjunto de puntos en $\mathbb{R}^2$.
   (a) Hallar la recta que pasa por el origen y es la más cercana en el sentido de cuadrados mínimos al conjunto de puntos C. Mostrar que dicha recta no depende de k. (12 puntos)
   (b) Calcular el error cometido en la aproximación de cuadrados mínimos. ¿Para qué valor de k el error es mínimo? Explicar por qué siendo que cuadrados mínimos minimiza el error cometido y éste depende de k, la solución hallada en (a) no depende de k. (10 puntos)

1) Sea $x \in \mathbb{R}^n$ y $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ una matriz simétrica, el coeficiente de Rayleigh de x es de la forma: $r_A(x) = \dfrac{x^tAx}{x^tx}$

a) Como A es simétrica tiene una base ortonormal de autovectores de la forma $\{x_1, \dots, x_n\}$. Con ellos vemos que podemos escribir a x como <u>combinación lineal</u> de los vectores de la forma $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n$. Llamamos que el autovalor asociado a x_i es λ_i.

En base a esto:

$$|r_A(x)| = \left|\frac{x^tAx}{x^tx}\right| = \left|\frac{(\alpha_1 x_1^t + \alpha_2 x_2^t + \dots + \alpha_n x_n^t)\, A\, (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n)}{(\alpha_1 x_1^t + \alpha_2 x_2^t + \dots + \alpha_n x_n^t)(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n)}\right| = \left|\frac{\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^t\right) A \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right)}{\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^t\right)\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right)}\right| =$$

$$= \left|\frac{\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^t\right)\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i A x_i\right)}{\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^t\right)\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right)}\right| = \left|\frac{\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^t\right)\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \lambda_i x_i\right)}{\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^t\right)\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i\right)}\right| \left(A x_i = \lambda_i x_i\right) = \left|\frac{\sum_{i=1}^n \lambda_i \alpha_i^2 \overbrace{x_i^t x_i}^{1}}{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2 \underbrace{x_i^t x_i}_{1}}\right|$$

($\{x_1, \dots, x_n\}$ forman una base ortonormal,

el paréntesis mejor escribilo
debajo del $\leq$

por lo que $x_i^t x_j = 0$ si $i \neq j$ y $x_i^t x_i = 1$) $\leq \dfrac{\sum_{i=1}^n \rho(A)\alpha_i^2}{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2}$ $\left(\rho(A) = \max\limits_{\lambda \text{ autovalor de } A} |\lambda| \Rightarrow \lambda_i \leq |\lambda_i| \leq \rho(A) \text{ para todo } i = 1, \dots, n\right) =$

$$= \frac{\rho(A) \sum_{i=1}^n \alpha_i^2}{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2} = \underline{\rho(A)}$$

OJO, no podés acotar
de esa manera sin decir eso
que $\left|\dfrac{\sum \lambda_i \alpha_i^2}{\sum \alpha_i^2}\right| \leq \dfrac{\sum |\lambda_i| \alpha_i^2}{\sum \alpha_i^2}$

$\therefore$ <u>Para todo $x \in \mathbb{R}^n$, $|r_A(x)| \leq \rho(A)$</u>

b) Sea $y \in \mathbb{R}^n$ tal que $Ay = \lambda y$, $\|y\|_2 = 1$ y $|\lambda| = \rho(A)$. Sea $z = y + h$ con $z, h \in \mathbb{R}^n$, $\|z\|_2 = 1$ y $\|z - y\|_2 = \|h\|_2 < \varepsilon$ con $\varepsilon > 0$

Si $M = \|A - \lambda I\|_2$ q.v.q. $|r_A(z) - \lambda| \leq M\varepsilon^2$. Para ello vemos que:

$$|r_A(z) - \lambda| = \left|\frac{z^tAz}{\underbrace{z^tz}_{\|z\|_2 = 1}} - \lambda\right| = |z^tAz - \lambda \underbrace{z^tz}_{\|z\|_2=1}| = |z^t(Az - \lambda z)| = |z^t(A - \lambda I)z| = |(y+h)^t(A - \lambda I)(y+h)| = |(y+h)^t(Ay - \lambda y + Ah -$$

$$- \lambda h)| = |(y+h)^t(\cancel{\lambda y} - \cancel{\lambda y} + Ah - \lambda h)| \; (y \text{ es autovector de } A \text{ con autovalor } \lambda) = |y^tAh - \lambda y^th + h^tAh - \lambda h^th| = |h^tAy - \lambda h^ty +$$

$$+ h^tAh - \lambda h^th| \; (y^tAh \in \mathbb{R} \Rightarrow y^tAh = (y^tAh)^t = h^tA^ty = h^tAy \text{ pues } A = A^t) = |\cancel{h^t\lambda y} - \cancel{h^t\lambda y} + h^t(A - \lambda I)h| = |h^t(A - \lambda I)h| \leq$$

$$\leq \|h\|_2 \|(A - \lambda I)h\|_2 \; (\text{desigualdad de C-S}) \leq \|h\|_2 \|A - \lambda I\|_2 \|h\|_2 \; (\text{propiedad de norma inducida}) < \varepsilon \cdot M \cdot \varepsilon = \underline{M\varepsilon^2}$$

super prolijo

2) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $rg(A) = r > 1$ y $A = U\Sigma V^t$ su descomposición SVD tal que $U = (u_1 \dots u_n)$, $V = (v_1 \dots v_n)$ y $\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{pmatrix}$ con $\sigma_i > 0$ para todo $i = 1, \dots, r$. Sea $B = A - \sigma_1 u_1 v_1^t$

a) Queremos ver que $v_1 \in Nu(B)$, es decir, $Bv_1 = 0$. Para ello hacemos:

$$Bv_1 = (A - \sigma_1 u_1 v_1^t)v_1 = Av_1 - \sigma_1 u_1 \underbrace{v_1^t v_1}_{\|v_1\|_2 = 1} = U\Sigma V^t v_1 - \sigma_1 u_1 = U\Sigma e_1 - \sigma_1 u_1 \left(V^t = \begin{pmatrix} v_1^t \\ \vdots \\ v_n^t \end{pmatrix} \Rightarrow V^t v_1 = \begin{pmatrix} v_1^t v_1 \\ \vdots \\ v_n^t v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$= e_1$ por ser V ortogonal y entonces sus columnas forman una base ortonormal$\Big) = U\sigma_1 e_1 - \sigma_1 u_1 \left(\Sigma e_1 = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \sigma_r \end{pmatrix} e_1 = \sigma_1 e_1 \right) =$

$= \sigma_1 U e_1 - \sigma_1 u_1 = \sigma_1 \, col_1(U) - \sigma_1 u_1 = \sigma_1 u_1 - \sigma_1 u_1 = 0$ $\therefore Bv_1 = 0 \Rightarrow v_1 \in Nu(B)$ B

b) Sea $w \in \mathbb{R}^n$ tal que $w \perp v_1$, vemos que $w^t v_1 = v_1^t w = 0$ y tenemos que

$$Bw = (A - \sigma_1 u_1 v_1^t)w = Aw - \sigma_1 u_1 \underbrace{v_1^t w}_{0} = Aw$$ B

c) Siendo $B = A - \sigma_1 u_1 v_1^t$ vemos que $B^tB = (A - \sigma_1 u_1 v_1^t)^t(A - \sigma_1 u_1 v_1^t) = (A^t - \sigma_1 v_1 u_1^t)(A - \sigma_1 u_1 v_1^t) = A^tA - \sigma_1 v_1 u_1^t A -$

$- A^t \sigma_1 u_1 v_1^t + \sigma_1^2 v_1 \underbrace{u_1^t u_1}_{\|u_1\|_2 = 1} v_1^t = A^tA - \sigma_1 v_1 u_1^t U\Sigma V^t - V\Sigma^t U^t u_1 \sigma_1 v_1^t + \sigma_1^2 v_1 v_1^t = A^tA - \sigma_1 v_1 e_1^t \Sigma V^t - V\Sigma e_1 \sigma_1 v_1^t + \sigma_1^2 v_1 v_1^t$

$\left(u_1^t U = u_1^t (u_1 \dots u_n) = (1\ 0 \dots 0) = e_1^t \Rightarrow U^t u_1 = e_1 \right) = A^tA - \sigma_1^2 v_1 e_1^t V^t - V e_1 \sigma_1^2 v_1^t + \sigma_1^2 v_1 v_1^t \left(\Sigma e_1 = \begin{pmatrix} \sigma_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \sigma_1 e_1 \right) = A^tA -$

$- \cancel{\sigma_1^2 v_1 v_1^t} - v_1 v_1^t \sigma_1^2 + \cancel{\sigma_1^2 v_1 v_1^t} \left(Ve_1 = v_1 \Rightarrow (Ve_1)^t = e_1^t V^t = v_1^t \right) = A^tA - v_1 v_1^t \sigma_1^2$

Ahora, los autovalores de B^tB son los cuadrados de los valores singulares de B. En base a eso vemos que si tomamos v_i con $i = 2, \dots, r$ obtenemos:

$$B^tB v_i = (A^tA - v_1 v_1^t \sigma_1^2) v_i = A^tA v_i - \sigma_1^2 v_1 \underbrace{v_1^t v_i}_{0} = \sigma_i^2 v_i \quad (v_1^t v_i = 0 \text{ pues } i \neq 1 \text{ y } A^tA v_i = \sigma_i^2 v_i \text{ para todo } i = 1, \dots, r)$$

Por ende v_i es autovector de B^tB con autovalor σ_i^2 para $i = 2, \dots, r$. Esto nos dice que $\sigma_2, \dots, \sigma_r$ son valores singulares de B

$\left(\sqrt{\sigma_2^2}, \dots, \sqrt{\sigma_r^2} = |\sigma_2^2|, \dots, |\sigma_r^2| = \sigma_2, \dots, \sigma_r \text{ por ser } \sigma_i > 0 \text{ para todo } i = 1, \dots, r \right)$ B

d) El espacio fila de B se encuentra formado por el subespacio de $\mathbb{R}^n$ de la forma $\langle fila_1(B), \dots, fila_n(B) \rangle$. Sabiendo que el espacio columna de B es $Im(B)$ $\left(\text{Para } x \in \mathbb{R}^n, \ Bx = (c_1 \dots c_n) \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n \right)$ vemos que si tomamos B^t las columnas de B^t son las filas de B y luego el espacio fila de B es $Im(B^t)$.

Ahora con eso en mente tomamos el vector $y_i = \frac{u_i}{\sigma_i}$ donde $i \in \{2, \dots, r\} \Rightarrow \sigma_i > 0$ y $u_i \neq 0$ y vemos que:

$$B^t y_i = (A - \sigma_1 u_1 v_1^t)^t \frac{u_i}{\sigma_i} = (A^t - \sigma_1 v_1 u_1^t) \frac{u_i}{\sigma_i} = A^t \frac{u_i}{\sigma_i} - \frac{\sigma_1}{\sigma_i} v_1 \underbrace{u_1^t u_i}_{0} = (U\Sigma V^t)^t \frac{u_i}{\sigma_i} = V\Sigma^t U \frac{u_i}{\sigma_i} = V\Sigma^t \frac{e_i}{\sigma_i} = V e_i \frac{\sigma_i}{\sigma_i} = v_i$$

Con esto vemos que para todo v_i con $i = 2, \dots, r$ existe $y_i \in \mathbb{R}^n$ tal que $B^t y_i = v_i \Rightarrow v_2, \dots, v_n$ pertenecen al espacio fila de B

B ¡IMPECABLE!

3) Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ definida positiva, $w>0$ y $D \in \mathbb{R}^{n\times n}$ la matriz diagonal con los elementos de la diagonal de A. Tenemos el esquema iterativo: $x^{(k+1)} = x^{(k)} + wD^{-1}r^{(k)}$ para $k=0,1,\dots$ siendo $r^{(k)} = b - Ax^{(k)}$

a) $D^{-1} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ existe pues al ser A definida positiva los elementos de su diagonal son positivos ($e_i^t A e_i = a_{ii} > 0$ para todo $i = 1,\dots,n$)

Siendo $w=1$ vemos que podemos escribir el esquema iterativo como:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + D^{-1}r^{(k)} = x^{(k)} + D^{-1}(b - Ax^{(k)}) = \underline{x^{(k)} + D^{-1}b - D^{-1}Ax^{(k)}}$$

Ahora, tomando el splitting de $A = D' - L - U$ donde D' es diagonal, L es estrictamente triangular inferior y U es estrictamente triangular superior vemos que $D' = D$, entonces:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + D^{-1}b - D^{-1}(D-L-U)x^{(k)} = x^{(k)} + D^{-1}b - \underbrace{D^{-1}D}_{I}x^{(k)} + D^{-1}Lx^{(k)} + D^{-1}Ux^{(k)} = x^{(k)} - x^{(k)} + D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b =$$

$= D^{-1}(L+U)x^{(k)} + D^{-1}b = \underline{T_J x^{(k)} + c_J}$ donde T_J es la matriz de iteración del método de Jacobi y c_J su constante correspondiente

b) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $\alpha \in \mathbb{R}$ queremos que el sistema iterativo converja. Para ello vemos que la matriz del método iterativo es T:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} + wD^{-1}r^{(k)} = x^{(k)} + wD^{-1}(b - Ax^{(k)}) = x^{(k)} + wD^{-1}b - wD^{-1}Ax^{(k)} = (I - wD^{-1}A)x^{(k)} + wD^{-1}b \Longrightarrow \underline{T = I - wD^{-1}A}$$

Teniendo $A = \begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ podemos calcular $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ y entonces $T = I - w\underbrace{D^{-1}}_{I}A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - w\begin{pmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \underline{\begin{pmatrix} 1-w & -\alpha w \\ 0 & 1-w \end{pmatrix}}$

Ahora, el método converge sii $\rho(T) < 1$ por lo que si vemos el polinomio característico de T llegamos a que

$P_T(\lambda) = \det(T - \lambda I) = \det\begin{pmatrix} 1-w-\lambda & -\alpha w \\ 0 & 1-w-\lambda \end{pmatrix} = (1-w-\lambda)^2 - \alpha \cdot 0 = 0 \Longrightarrow (1-w-\lambda)^2 = 0$ por lo que tenemos los autovalores:

$1-w-\lambda_1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1-w$ y $1-w-\lambda_2 = 0 \Rightarrow \underline{\lambda_2 = 1-w = \lambda_1}$

Con esto vemos que $\rho(T) = \max\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\} = \max\{|1-w|, |1-w|\} = \underline{|1-w|}$ y luego $\rho(A) < 1 \iff |1-w| < 1 \iff -1 < 1-w < 1 \iff$

$\iff -2 < -w < 0 \iff 0 < w < 2 \iff \underline{w < 2}$ $(w>0)$

$\therefore$ El esquema iterativo converge sii $w<2$

4) Sea $k \in \mathbb{R}$ y $C = \{(1,0), (0,k), (-1,1)\} \in \mathbb{R}^2$

a) Buscamos $a \in \mathbb{R}$ tal que para $F(x) = ax$ se tiene el esquema de cuadrados mínimos $\min_{a} \sum_{i=1}^{3} (F(x_i) - y_i)^2$ donde $(x_i, y_i) \in C$

Esto se traduce a buscar el mínimo de la función $g(a) = \sum_{i=1}^{3} (a x_i - y_i)^2$ por lo cual la derivamos por a y vemos que:

$\frac{\partial g}{\partial a}(a) = \sum_{i=1}^{3} 2(a x_i - y_i) x_i$ y para hallar un punto crítico tomamos $\frac{\partial g}{\partial a}(a) = 0 = \sum_{i=1}^{3} 2(a x_i - y_i) x_i = 2(a.1 - 0).1 + 2.(a.0 - k).0 +$

$+ 2(a(-1) - 1).(-1) = 2a + 0 + 2a + 2 = 4a + 2 \longrightarrow 4a = -2 \Longrightarrow a = \frac{-1}{2}$

Ahora calculamos $\frac{\partial^2 g}{\partial a^2}(a) = \sum_{i=1}^{3} 2x_i^2 = (1)^2 + 0^2 + (-1)^2 = 2 > 0$ y vemos que particularmente $\frac{\partial^2 g}{\partial a}(-1/2) > 0$ por lo que $a = -1/2$ mínimo g

y la recta que más se acerca a C en el sentido de cuadrados mínimos es $F(x) = \frac{-1}{2}x$ siendo que pasa por el origen.

Como podemos ver, dicho valor de a no depende de k ni lo hace la recta correspondiente.

b) Teniendo $F(x) = ax = \frac{-1}{2}x$ del ítem anterior, podemos calcular el error cometido por cuadrados mínimos como:

$$E = \sum_{i=1}^{3} (F(x_i) - y_i)^2 = \left(-\tfrac{1}{2}x_1 - y_1\right)^2 + \left(-\tfrac{1}{2}x_2 - y_2\right)^2 + \left(-\tfrac{1}{2}x_3 - y_3\right)^2 = \left(-\tfrac{1}{2}\right)^2 + (-k)^2 + \left(\tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} + k^2$$

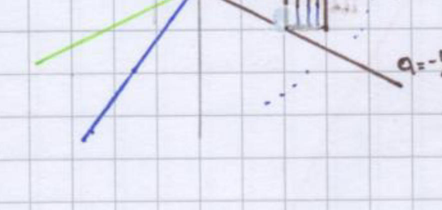
Como podemos ver, el error cuadrático depende del valor de $k \in \mathbb{R}$ en la segunda coordenada del segundo punto de C. Teniendo en cuenta eso vemos que $E(k) = \frac{1}{4} + k^2$ se minimiza para $k = 0$ pues $\frac{\partial E}{\partial k}(k) = 2k = 0 \Rightarrow k = 0$ y $\frac{\partial^2 E}{\partial k^2}(k) = 2 > 0$.

Esto parece tener sentido puesto que la recta que debíamos hallar pasa por el origen, es decir, por el punto $(0,0)$ y este forma parte de C si $k=0$. Ahora, notemos que el error depende de k pero la solución de la recta hallada en a) no lo hace.

Esto podemos explicarlo viendo que para una recta genérica $F(x) = ax$ que pasa por el origen el error cometido es

$$E(k) = \sum_{i=1}^{3} (F(x_i) - y_i)^2 = (a x_1 - y_1)^2 + (a x_2 - y_2)^2 + (a x_3 - y_3)^2 = (a - 0)^2 + (0 - k)^2 + (-a - 1)^2 = a^2 + \underbrace{k^2}_{(*)} + (a+1)^2$$

donde si miramos el término $(*)$ que es el error producido para el punto $(0,k)$ este no depende del valor de a sino del de k. Por lo tanto, como buscamos el coeficiente a que minimice $E(k)$ sin alterar el valor de k, dicho error se va a cometer de igual magnitud para toda recta que pase por el origen que sea de la forma $y = ax$ con $a \in \mathbb{R}$. Gráficamente vemos:



Para los diferentes valores de $a \in \mathbb{R}$ las rectas formadas pasan por $(0,0)$ por lo que el error cometido por cuadrados mínimos con respecto a $(0,k)$ se toma siempre del origen como el área del cuadrado E de la figura.

El gráfico a su vez nos muestra la representación gráfica de $E(k)$ para $a = 1/2$ que es el coeficiente de la recta que lo minimiza.

Muy bien!